Inverzna Laplasova transformacija

Za datu f-ju $F(s)$, ako postoji f-ja $f(t)$ koja je neprekidna na $[0,\infty)$ i koja ima osobinu

$$\mathcal{L}\{f\} = F$$

tada kažemo da je $f(t)$ inverzna Laplasova transformacija f-je $F(s)$ i koristimo oznaku $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Inverzna Laplasova transformacija zadovoljava osobinu linearnosti:
Pretpostavimo da postoje f-je $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, $\mathcal{L}^{-1}\{F_1\}$ i $\mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$ koje su neprekidne na $[0,\infty)$ i neka je c neka konstanta. Tada

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1 + F_2\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{cF\} = c\,\mathcal{L}^{-1}\{F\}$$

(#) Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ ako je

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$ (b) $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$ (c) $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2-2s+5}$

Rj.

(a) Iz tabele Laplasovih transformacija primjetimo da imamo

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\}(t) = t^2 \quad \left(\text{zato što } \mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2!}{s^3}\right)$$

(b) Iz tabele Laplasovih transformacija primjetimo da

$$\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}(t) = \sin 3t$$

(c) Iz tabele Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^n\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\}(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t) = e^t\cos 2t$$

$(s-1)^2 = s^2-2s+1$

(#) Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$.

Rj: U rješenju ćemo iskoristiti osobinu linearnosti

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}=$$

$$=5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\}-6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}+\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}$$

Prema elementarnoj tablici Laplasovih transformacija imamo da

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\}(t)=e^{6t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}(t)=\cos 3t$$

Kako je

$$s^2+4s+5=s^2+2\cdot s\cdot 2+2^2+1=(s+2)^2+1$$ to je

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\right\}(t)=e^{-2t}\sin t$$

Prema tome

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-6}-\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}(t)=5e^{6t}-6\cos 3t+\frac{3}{2}e^{-2t}\sin t$$

(#) Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}$.

Rj. Izraz $(s+2)^4$ u nazivniku nam sugerira da vjerovatno trebamo iskoristiti formulu

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^n\}(s)=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

iz elementarne tablice transformacija tj.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\}(t)=e^{at}t^n$$

U ovom slučaju mi imamo $a=-2$ i $n=3$ pa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s+2)^4}\right\}(t)=e^{-2t}t^3.$$

Ako iskoristimo osobinu linearnosti imamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+2)^4}\right\}(t)=\frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s+2)^4}\right\}(t)=\frac{5}{6}e^{-2t}t^3.$$

(#) Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}$.

Rj.

$$s^2+2s+10 = s^2+2\cdot s\cdot 1+1-1+10 = (s+1)^2+3^2$$

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = \frac{3s+2}{(s+1)^2+3^2}$$

Iz tablice elementarnih Laplasovih transformacija

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at}\cos bt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\}(t) = e^{at}\sin bt$$

U našem slučaju $a=-1$, $b=3$.

Sljedeći korak je da odredimo konstante A i B iz izraza

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10} = A\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + B\frac{3}{(s+1)^2+3^2} \qquad /\cdot(s^2+2s+10)$$

$$3s+2 = A(s+1)+3B \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} s^0:\ A=3 \\ s^1:\ A+3B=2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=3 \\ B=-\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\}(t)$$

$$= 3e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$$

Primjedba Posmatrajmo sljedeće dvije f-je

$$F_1(s) = \frac{7s^2+10s-1}{s^3+3s^2-s-3} \quad ;$$

$$F_2(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+3} \quad .$$

Ako nas neko prisili da nađemo inverznu Laplasovu transformaciju jedne od ove dvije f-je, koju biste izabrali? Bez sumnje $F_2(s)$ je lakša. U stvari, ove dvije f-je $F_1(s)$ i $F_2(s)$ su identički jednake. Ovo se može provjeriti tako što ćemo sabrati razlomke u f-ji $F_2(s)$. Prema tome, ako se suočimo sa problemom računanja $\mathcal{L}^{-1}$ racionalne f-je kao što je $F_1(s)$, prvo ćemo je izraziti kao sumu jednostavnih racionalnih f-ja (kao što je $F_2(s)$). Ovo se postiže metodom parcijalnih razlomaka.

Ukratko ćemo se podsjetiti ove metode. Od ranije znamo da se racionalna f-ja $\frac{P(s)}{Q(s)}$, gdje su $P(s)$ i $Q(s)$ polinomi u kojima je stepen od P manji od stepena od Q, može razložiti kao suma izraza parcijalnih razlomaka u kojima je nazivnik linearni ili kvadratni faktor polinoma $Q(s)$ (pretpostavljamo da su koeficijenti polinoma realni brojevi). Postoje tri slučaja koja treba razmotriti:

1° Neponavljajući linearni faktori

2° Ponavljajući linearni faktori

3° Kvadratni faktori

NEPONAVLJAJUĆI LINEARNI FAKTORI

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ gdje je $F(s)=\dfrac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$.

Rj.

$$\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-3}\qquad /(s+1)(s+2)(s-3)$$

$$7s-1=A(s+2)(s-3)+B(s+1)(s-3)+C(s+1)(s+2)\qquad \ldots(1)$$

$$7s-1=A(s^2-s-6)+B(s^2-2s-3)+C(s^2+3s+2)$$

$$7s-1=(A+B+C)s^2+(-A-2B+3C)s+(-6A-3B+2C)$$

Ako izjednačimo koeficijente koji se nalaze uz s^2, s i 1 dobićemo

$$\begin{aligned}A+B+C&=0\\-A-2B+3C&=7\\-6A-3B+2C&=-1\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\-1&-2&3&7\\-6&-3&2&-1\end{array}\right]\underset{III_v+I_v\cdot 6}{\overset{II_v+I_v}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-1&4&7\\0&3&8&-1\end{array}\right]\overset{III_v+II_v\cdot 3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-1&4&7\\0&0&20&20\end{array}\right]$$

$\Rightarrow \underset{\ldots}{\text{ZA VJEŽBU}} \Rightarrow A=2,\ B=-3,\ C=1$

II način – da odredimo koeficijente A, B i C je da u jednačinu (1) uvrstimo redom $s=-1$, -2 i 3 iz čega bi dobili da je $A=2$, $B=-3$, $C=1$.

Na kraju

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s-3}\right\}(t)=$$

$$=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t)-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t)+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}(t)=2e^{-t}-3e^{-2t}+e^{3t}.$$

\# PONAVLJAJUĆI LINEARNI FAKTORI

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$.

Rj

$$\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3} \quad /(s-1)^2(s+3)$$

$$s^2+9s+2 = A(s-1)(s+3) + B(s+3) + C(s-1)^2 \quad \ldots (1)$$

$$s^2+9s+2 = A(s^2+2s-3) + B(s+3) + C(s^2-2s+1)$$

I način

Izjednačimo koeficijente koji stoje uz s^2, s i 1.

$$\begin{aligned} A \quad\;\; + C &= 1 \\ 2A + B - 2C &= 9 \\ -3A + 3B + C &= 2 \end{aligned}$$

rješenjem sistema dobijamo $A=2$, $B=3$, $C=-1$

II način

Uvrstimo u (1) za s vrijednost +1. Dobijamo

$$12 = 4B \Rightarrow B = 3$$

Ako u (1) uvrstimo $s=-3$ $\quad \overbrace{9-27+2}^{-16} = 16C$

$$C = -1$$

Da bi odredili A za s možemo izabrati proizvoljnu vrijednost npr. $s=0$, Ako uvrstimo $s=0$, $B=3$ i $C=-1$ u (1) dobijamo $A=2$

Na kraju

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} - \frac{1}{s+3}\right\}(t) =$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t) = 2e^t + 3te^t - e^{-3t}.$$

KVADRATNI FAKTORI

Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}$.

Rj. $s^2-2s+5=0$

$D=4-20<0$ $\Rightarrow$ Vidimo da je kvadratni faktor $s^2-2s+5=0$ nesvodljiv što znači da ga moramo napisati u obliku $(s-\alpha)^2+\beta^2$.

$$s^2-2s+5=s^2-2\cdot s\cdot 1+1^2-1^2+5=(s-1)^2+2^2$$

$$\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}=\frac{A(s-1)+2B}{(s-1)^2+4}+\frac{C}{s+1} \quad /(s^2-2s+5)(s+1)$$

$$2s^2+10s=\left(A(s-1)+2B\right)(s+1)+C(s^2-2s+5). \quad \ldots(1)$$

I način

U (1) uvrstimo redom $s=-1,\ 1$ i 0. Za $s=-1$ imamo

$$2-10=(-2A+2B)\underbrace{(-1+1)}_{=0}+C\cdot 8 \Rightarrow 8C=-8$$
$$C=-1$$

Za $s=1$ imamo $2+10=(A\cdot 0+2B)\cdot 2+C\cdot 4 \Rightarrow$ kako je $C=-1$

$\Rightarrow 12=4B-4 \Rightarrow B=4$

Za $s=0$, $C=-1$ i $B=4$ u (1) imamo $0=(-A+2B)\cdot 1+5\cdot C$

$A=3$

II način

Izjednačimo koeficijente koji stoje uz s^2, s i 1... ZA VJEŽBU

Na kraju:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+2\cdot 4}{(s-1)^2+2^2}-\frac{1}{s+1}\right\}(t)=$$

$$=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t)+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}(t)-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t)=3e^t\cos 2t+4e^t\sin 2t-e^{-t}.$$

Zadaci za vežbu

1. Odrediti inverznu Laplace-ovu transformaciju date f-je

(a) $\dfrac{6}{(s-1)^4}$ (b) $\dfrac{s+1}{s^2+2s+10}$ (c) $\dfrac{1}{s^2+4s+8}$

(d) $\dfrac{2s+16}{s^2+4s+13}$ (e) $\dfrac{3s-15}{2s^2-4s+10}$

2. Datu racionalnu f-ju rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka

(a) $\dfrac{s^2-26s-47}{(s-1)(s+2)(s+5}$ (b) $\dfrac{-2s^2-3s-2}{s(s+1)^2}$ (c) $\dfrac{8s-2s^2-14}{(s+1)(s^2-2s+5)}$

(d) $\dfrac{3s+5}{s(s^2+s-6)}$ (e) $\dfrac{1}{(s-3)(s^2+2s+2)}$

3. Odrediti $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$

(a) $F(s)=\dfrac{6s^2-13s+2}{s(s-1)(s-6)}$ (b) $F(s)=\dfrac{5s^2+34s+53}{(s+3)^2(s+1)}$

(c) $F(s)=\dfrac{7s^2+23s+30}{(s-2)(s^2+2s+5)}$ (d) $s^2F(s)-4F(s)=\dfrac{5}{s+1}$

(e) $sF(s)+2F(s)=\dfrac{10s^2+12s+14}{s^2-2s+2}$

Odgovori:

1.

(a) $e^{t}t^{3}$ (b) $e^{-t}\cos 3t$ (c) $\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$

(d) $2e^{-2t}\cos 3t+4e^{-2t}\sin 3t$

(e) $\frac{3}{2}e^{t}\cos 2t-3e^{t}\sin 2t$

2.

(a) $\frac{6}{s+5}-\frac{1}{s+2}-\frac{4}{s-1}$ (b) $\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{2}{s}$

(c) $-\frac{3}{s+1}+\frac{(s-1)+2}{(s-1)^2+4}$ (d) $-\frac{5}{6s}+\frac{11}{10(s-2)}-\frac{4}{15(s+3)}$

(e) $\frac{1}{17}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{4}{(s+1)^2+1}\right)$

3.

(a) $\frac{1}{3}+e^{t}+\frac{14}{3}e^{6t}$ (b) $-e^{-3t}+2te^{-3t}+6e^{-t}$

(c) $8e^{2t}-e^{-t}\cos 2t+3e^{-t}\sin 2t$

(d) $-\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{5}{12}e^{2t}+\frac{5}{4}e^{-2t}$

(e) $3e^{-2t}+7e^{t}\cos t+11e^{t}\sin t$